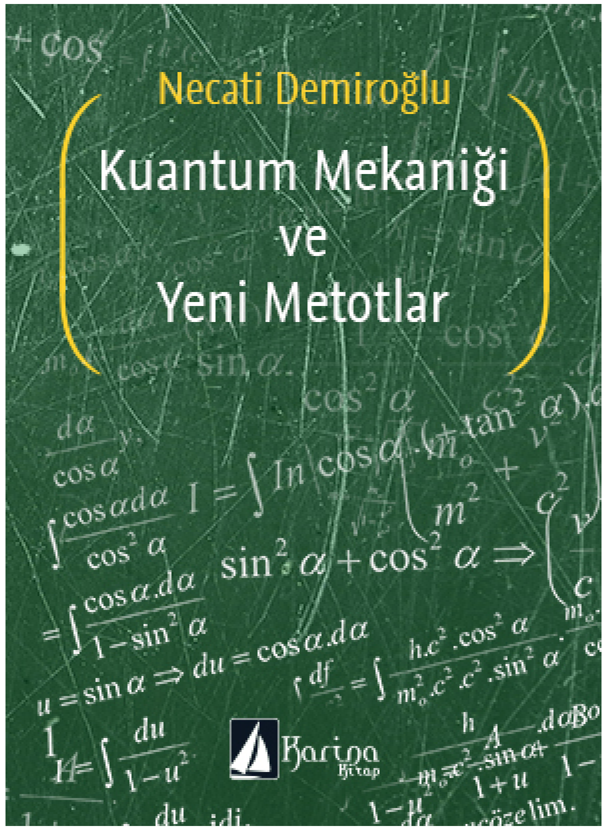
Necati Demiroğlu

Kuantum Mekaniği ve Yeni Metotlar

Karina Kitap


Necati Demiroğlu
Kuantum Mekaniği
ve
Yeni Metotlar
Karina
Kitap

KUANTUM MEKANİĞİ VE YENİ METOTLAR

Necati Demiroğlu

Karina Kitap

KUANTUM MEKANİĞİ VE YENİ METOTLAR

Necati Demiroğlu

1.Basım: Mayıs 2013

ISBN: 978-605-63555-9-2

Görsel Yönetmen: Mehmet Coşkun

Yayın Hakları: Karina Kitap
Sertifika: 22055

Adres: Ataç1 Sokak No:7/15 Kızılay Çankaya / ANKARA

Telefon: 0 312 433 39 69

Faks: 0 312 433 39 70

E-posta: iletisim@karinakitap.com

Baskı: Tarcan Matbaası

Tel: (0312) 384 34 35



Necati Demiroğlu

Yazarımız Necati DEMİROĞLU 1968 yılında Elazığ'da doğdu. İlk ve orta öğreniminin ardından 1987 yılında Hacettepe Üniversitesi Tıp Fakültesi'ni kazandı. 1990 yılında özel sebeplerden dolayı okuldan ayrılarak 1991 yılında Fırat Üniversitesi Elektrik-Elektronik Mühendisliği Bölümü'nü kazanan yazarımız okulu bitirdikten sonra ilk görev yeri olan Samsun Halk Bankası Bölge Müdürlüğü'nde çalıştı. Halen DSİ 9. Bölge Müdürlüğü 12. Sondaj Şube Müdürlüğü'nde Elektrik-Elektronik Mühendisi olarak çalışmakta olup, evli ve iki çocuk babasıdır.

TEŞEKKÜR

Bu kitabı sevgili eşim Figen ve kızlarım Sıla ile Aslı’ya ithaf ediyorum. Ayrıca, Karina Kitap çalışanlarına ve mesai arkadaşım Jeoloji Mühendisi Şerafettin VAROL’a teşekkür ederim.

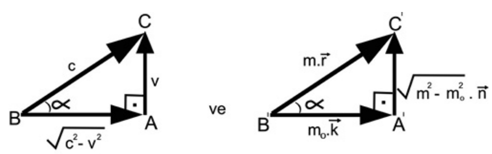
Necati Demiroğlu

Kuantum Mekaniği ve Yeni Metotlar

21. yüzyılın en önemli gelişmelerinden birisi de kuantum fiziğinde yaşanan gelişmelerdir. Atom altı parçacıkların keşfiyle beraber, bu parçacıkların hareketleri, davranışları merak edilmiş ve yapılan araştırmalar ve teorik çalışmalar neticesinde yüksek enerjili parçacıkların momentumları, enerjileri ve kütleleri hakkında bilgiler elde edilmiştir. Bütün bu bilgiler sonucunda bir takım matematiksel denklemler ve formüller ortaya çıkmıştır.

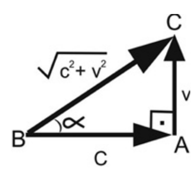
CERN'de yapılan deneysel çalışmalar ışığında Higgs parçacığı bulunmuş ve ışık hızının aşılabileceği gibi bir durum ortaya çıkmıştır.

Şimdi bu formüllerden izafiyet teorisinin elde edilmesini ve farklı yeni formüllerinin nasıl olacağını bulmaya çalışalım: Bütün bunlar yeni bir metotla elde edilmiştir ve bu çalışmalar tarafıma ait, özgün çalışmalardır.



(Şekil-1) (Şekil-2)

Kuantum üçgenleri



(Şekil-3)

Kuantum üçgeni

Yukarıdaki üçgenler, kuantum üçgenleri olarak adlandırabileceğimiz üçgenlerdir.

v: Parçacığın hızı

c: Işık hızı

mo: Durgun kütle

m: Parçacığın (v) hızında iken sahip olduğu kütle

Hız, vektörel bir büyüklüktür; kütle ise skaler bir büyüklüktür. Kütleyi vektörel bir büyüklük olarak gösterebilmek için birim vektörle (vektör çarpanı ile) birlikte göstermeliyiz, yani birim vektörle çarparsak vektörel bir büyüklük olur.

Trigonometrik eşitlikleri kullanalım:

$sin\alpha = \frac{V}{C}$ *ve* $cos\alpha = \frac{m_o.\vec{k}}{m.\vec{r}}$ *olur.* (I)

$|\vec{k}| = |\vec{r}| = |\vec{n}| = 1$ birimdir. (II) Trigonometrik açılar birer orandır ve

$$cos\alpha = \frac{m_o|\vec{k}|}{m.|\vec{r}|} = \frac{m_o.1}{m.1} = \frac{m_o}{m} \text{ olur.}$$

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \left(\frac{v}{c}\right)^2 + \left(\frac{m_o}{m}\right)^2 = 1$ (III)

$$\Rightarrow \frac{v^2}{c^2} + \frac{m_0^2}{m^2} = 1 \Rightarrow \frac{m_0^2}{m^2} = 1 - \frac{v^2}{c^2} \quad \textit{yazabiliriz.}$$

Buradan da $\sqrt{m^2} = \sqrt{\frac{m_o^2}{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ ve $m = \frac{m_o}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ yazabiliriz. (IV)

Yukarıdaki ifade kütle ile hız arasındaki Einstein’in İzafiyet Teorisi’nin denklemidir.

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ idi.

$$\frac{v^2}{c^2} + \frac{m_0^2}{m^2} = 1$$

(m^2) (c^2)

(paydalarını eşitleyelim)

$m^2.v^2 + m_o^2.c^2 = m^2.c^2$ elde edilir. (V)

Bu eşitliğin her iki tarafını (c^2) ile çarparsak,

$m^2.v^2.c^2 + m_0^2. C^4 = m^2.c^4$ elde edilir. (VI)

p: m.v (momentum)

E_o: m_o c^2

E: $m.c^2$'dir. (E_o) ve (E), parçacığın enerjileridir.

$p^2.c^2 + E_o^2 = E^2$ elde edilir. (VII)

Sanal Kütle, Sanal Momentum ve Sanal Enerji

$\sin(2\alpha) = 2\sin\alpha.\cos\alpha$ (VIII)

$\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$ *'dir.* (IX)

$$\sin(2\alpha) = 2.\frac{v}{c}\frac{m_o}{m} = \frac{2m_o.v}{m.c} \quad \text{(X)}$$

$$\cos(2\alpha) = \left(\frac{m_o}{m}\right)^2 - \left(\frac{v}{c}\right)^2 \; dir. \quad \text{(XI)}$$

$\sin^2(2\alpha) + \cos^2(2\alpha) = 1$'dir.

$$\left(\frac{2m_o.v}{m.c}\right)^2 + \left(\frac{m_o^2}{m^2} - \frac{v^2}{c^2}\right)^2 = 1 \text{ 'dir.} \quad \text{(XII)}$$

$$\frac{4m_o^2.v^2}{m^2.c^2} + \frac{m_o^4}{m^4} - \frac{2m_o^2.v^2}{m^2.c^2} + \frac{v^4}{c^4} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{m_o^4}{m^4} + 2.\frac{m_o.v^2}{m^2.c^2} + \frac{v^4}{c^4} = 1 \quad \text{(XIII)}$$

Yukarıdaki ifade tam kare ifadesidir. Yani,

$$\left(\frac{m_o^2}{m^2} + \frac{v^2}{c^2}\right)^2 = 1 \text{ olarak yazabiliriz.} \quad \text{(XIV)}$$

Her iki tarafın karekökünü alalım,

$$\sqrt{\left(\frac{m_o^2}{m^2} + \frac{v^2}{c^2}\right)^2} = \sqrt{1} \quad \text{(XV)} \quad \text{yazabilir ve}$$

$$\left|\frac{m_o^2}{m^2} + \frac{v^2}{c^2}\right| = 1$$

$$\frac{m_o^2}{m^2}+\frac{v^2}{c^2}=\mp 1 \qquad \text{(XVI)}$$

$$\frac{m_o^2}{m^2}+\frac{v^2}{c^2}=-1$$ ifadesi elde edilir.

İlk bakışta bir ifadenin karesi pozitif olarak düşünülebilir, fakat kompleks olarak sayıların karesi negatif olarak çıkabilir.

$$\frac{m_o^2}{m^2}=-1-\frac{v^2}{c^2}\Rightarrow\frac{m_o^2}{m^2}=-\left(1+\frac{v^2}{c^2}\right) ve$$

$$m^2=-\frac{m_o^2}{\left(1+\frac{v^2}{c^2}\right)} \qquad \text{(XVII) olarak yazılır.}$$

Eşitliğin her iki tarafının karekökünü alırsak,

$$\sqrt{m^2}=\sqrt{-\frac{m_o^2}{\left(1+\frac{v^2}{c^2}\right)}} ve$$

$$m=\sqrt{-1}.\frac{m_o}{\sqrt{\left(1+\frac{v^2}{c^2}\right)}} \quad \textit{yazılır.}$$

$\sqrt{-1} = i$ 'dir. Yani (i), kompleks sayının imarjiner (sanal) kısmını ifade eder. Buradan da:

$m = i.\frac{m_o}{\sqrt{1+\frac{v^2}{c^2}}}$ yazılır. (XVIII) Yukarıdaki ifade sanal kütle ifadesidir.

Işık hızını aşabilen parçacıkların kütlesi, sanal olmaktadır. Bu parçacıklar takyonlar olarak ifade edilir. Bu parçacıkların enerjileri ve momentumları da mevcuttur. Şimdi bunların matematiksel denklemlerini yazalım:

$m = i.\frac{m_o}{\sqrt{1+\frac{v^2}{c^2}}} = i.\frac{m_o.c}{\sqrt{c^2+v^2}}\,dir.$

Δp: m.Δv'dir. Buradan,

$\int dp = \int m.dv$ Buradan,

P: Momentum
v: Hız
m: Kütle

Her iki tarafın integralini alırsak,

$$p = \int m.dv \text{ yazılır}$$

$$p = \int m(v).dv = \int i.\frac{m_o.c}{\sqrt{c^2 + v^2}}.dv \text{ dir. (XIX)}$$

Şekil III’ e göre:

$\cos\alpha = \dfrac{c}{\sqrt{c^2+v^2}}$ *ve* $\tan\alpha = \dfrac{v}{c}$ *dir.*

$\tan\alpha = \dfrac{v}{c}$ ***(Her iki tarafin türevini alalım)***

$$(1+\tan^2\alpha).d\alpha = \frac{dv}{c}$$

$$dv = c.(1+\tan^2\alpha).d\alpha = c.\left(1+\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}\right).d\alpha$$

$$\Rightarrow dv = c.\frac{(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)}{\cos^2\alpha}.d\alpha$$

$\Rightarrow dv = c.\dfrac{1}{\cos^2\alpha}.d\alpha$ *yazılır.* (XX)

$p = \int i.m_o.\dfrac{c}{\sqrt{c^2+v^2}}.dv$ idi. Yerine yazarsak,

$p = \int i.m_o.\cos\alpha.c.\dfrac{1}{\cos^2\alpha}.d\alpha$ *yazılır*

$p = \int i.m_o.c.\dfrac{d\alpha}{\cos\alpha}$ (XXI) elde edilir.

$I = \int \dfrac{d\alpha}{\cos\alpha}$ ***yi çözelim***

$I = \int \dfrac{\cos\alpha d\alpha}{\cos^2\alpha}$ ***yazabiliriz.***

$$I = \int \frac{\cos\alpha.d\alpha}{1-\sin^2\alpha}$$

$u = \sin\alpha \Rightarrow du = \cos\alpha . d\alpha$

$I = \int \frac{du}{1-u^2}$ *yazılır.*

$I = \int \frac{du}{1-u^2}$ *idi.* $\frac{1}{1-u^2} = \frac{A}{1+u} + \frac{B}{1-u}$ ***olarak yazılabilir.***

$$\frac{1}{1-u^2} = \frac{A}{1+u} + \frac{B}{1-u}$$
$$(1-u) \quad (1+u)$$

$1 = A - A.u + B + B.u$ *ve*

$1 = A + B + (B - A).u$ *yazılır.*

$$\begin{array}{l} A + B = 1 \\ + \; -A + B = 0 \\ \hline 2B = 1 \rightarrow B = ½ \text{ ve } A = ½ \text{ çıkar} \end{array}$$

$I = \int \frac{du}{1-u^2} = \int \frac{(1/2).du}{1+u} + \int \frac{(1/2).du}{1-u}$ yazılabilir.

Buradan da,

$I = \frac{1}{2} In\left|1+u\right| + \frac{1}{2}.In\left|1-u\right|$ *çıkar ve*

$I = \frac{1}{2}.In\left|(1+u).(1-u)\right| = \frac{1}{2} In\left|1-u^2\right|$

$I = \frac{1}{2} In\left|1-\sin^2\alpha\right| = \frac{1}{2} In\left|\cos^2\alpha\right|$

$I = In\left|\cos\alpha\right|$ *yazılır.*

$P = i.m_0.c.\ In\left|\cos\alpha\right|$ yazılır. (XXII)

Bu ifade, sanal momentum ifadesidir.

Momentum ifadesindeki,

$\cos\alpha = \frac{c}{\sqrt{c^2+v^2}}$ ile ifade edilir.

Bu parçacığın sahip olduğu enerji ise, şöyle bulunur:

$\Delta E = \Delta m.\ c^2 \rightarrow dE = dm.\ (c^2)$ (XXIII)

yazılabilir. Her iki tarafın integralini alırsak;

$\int dE = \int c^2.dm \Rightarrow E = \int c^2.dm$ ***olur.***

$m = \frac{i.m_o.c}{\sqrt{c^2 + v^2}}$ ***idi.***

(m)’nin türevini alırsak.

$dm = -\frac{i.m_o.c.v}{\sqrt{c^2 + v^2}.(c^2 + v^2)}.dv$ **çıkar. (Şekil III)’e göre**

$\tan\alpha = \frac{v}{c}$ **dır ve türev alırsak;**

İntegrali çözersek;

$$(1+\tan^2\alpha).d\alpha = \frac{dv}{c}$$

$$1+\tan^2\alpha = 1+\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{1}{\cos^2\alpha} \text{ dır.}$$

$$c.\frac{1}{\cos^2\alpha}.d\alpha = dv \text{ bulunur.}$$

$\sin\alpha = \dfrac{v}{\sqrt{c^2+v^2}}$ *dır.* Bütün bu değerleri eşitlikte yerine yazalım

$$dm = -\, i.m_o.c^2.\sin\alpha.\frac{1}{\cos^2\alpha}.\frac{\cos^2\alpha}{c^2}.d\alpha$$

dm = -i.m_o.sin α. dα elde edilir.

$E = \int c^2.dm = \int(-i.m_o.c^2).\sin\alpha.d\alpha$ bulunur.

İntegrali çözersek;

$E = i.m_o.c^2.\cos\alpha$ olur. (XXIV) Bu da parçacığın enerjisini verir. Aynı parçacığın kinetik enerjisi ise şudur:

$$p = \frac{dE_k}{dv} \Rightarrow dE_k = p.dv$$ (XXV)

$$\Rightarrow \int dE_k = \int p.dv \Rightarrow E_K = \int p.dv$$

$$E_K = \int i.m_o.c.In\left|\cos\alpha\right|.dv$$

$$dv = (1 + \tan^2\alpha).c.d\alpha \text{ idi.}$$

$$E_k = \int i.m_o.c.In\left|\cos\alpha\right|.(1 + \tan^2\alpha).c.d\alpha$$

$$E_k = i.m_o.c^2 \int In\left|\cos\alpha\right|.(1 + \tan^2\alpha).d\alpha$$

$I = \int In\left|\cos\alpha\right|.(1+\tan^2\alpha).d\alpha$ ***çözelim.***

$$\int dk = \int (1+\tan^2\alpha).d\alpha$$

$$k = \tan\alpha$$

$$u = In\left|\cos\alpha\right| \Rightarrow du = -\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = -\tan\alpha.d\alpha$$

$$I = \tan\alpha.In\left|\cos\alpha\right| - \int(-\tan\alpha).\tan\alpha.d\alpha$$

$$I = \tan\alpha.In\left|\cos\alpha\right| + \int(\tan^2\alpha.d\alpha + d\alpha - d\alpha)$$

$$I = \tan\alpha.In\left|\cos\alpha\right| + \int(1+\tan^2\alpha).d\alpha - \int d\alpha$$

$$I = \tan\alpha . In\left|\cos\alpha\right| + \tan\alpha - \alpha$$

Yerine yazarsak,

$$E_k = i.m_o.c^2(\tan\alpha . In\left|\cos\alpha\right| + \tan\alpha - \alpha)$$ (XXVI)

bulunur. Burada α, radyan cinsindendir.

Şimdi de ışık hızını aşmayan yüksek hızlı bir parçacığın momentumunu hesaplayalım:

$\Delta p = m.\Delta v$ idi.
$dp = m.dv$ yazılabilir. Her iki tarafın integralini alalım.

$$\int dp = \int m(v).dv \Rightarrow p = \int m(v).dv$$

$m = \dfrac{m_o.c}{\sqrt{c^2 - v^2}}$ *idi.*

$p = \int \dfrac{m_o.c}{\sqrt{c^2 - v^2}}.dv$ olur. (Şekil I)'e göre

$\sin\alpha = \dfrac{v}{c}$ *dir.*

Bu eşitliğin türevini alalım:

$$\cos\alpha.d\alpha = \frac{dv}{c}$$

$\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{c^2 - v^2}}{c}$ yazılabilir. Yerine yazarsak ;

$$\frac{\sqrt{c^2 - v^2}}{c} d\alpha = \frac{dv}{c} \Rightarrow d\alpha = \frac{dv}{\sqrt{c^2 - v^2}} \text{ olur.}$$

$$p = \int m_o.c.\frac{dv}{\sqrt{c^2 - v^2}} = \int m_o.c.d\alpha$$

$$p = m_o.c.\alpha = m_o.c.arc\sin\left(\frac{v}{c}\right) \text{ yazılır.} \qquad \text{(XXVII)}$$

Bu da momentumu verir. Buradaki (α) açısı, radyan cinsindendir. Enerji ise şöyle hesaplanır.

$\Delta E = h.\Delta f = \Delta m.c^2$'dir.
f: Frekans
m: Kütle
E: Enerji

$$\int dE = \int h.df = \int dm.c^2 \text{ olur.}$$

$$E = \int h.df = c^2 \int dm$$

$$m = \frac{m_o.c}{\sqrt{c^2 - v^2}} \Rightarrow dm = \frac{(-m_o.c)\dfrac{(-2v)}{2\sqrt{v^2 - c^2)}}}{(c^2 - v^2)}.dv$$

$$dm = \frac{m_o.c.v}{(c^2 - v^2).\sqrt{c^2 - v^2}} dv$$ ***yazılabilir.***

$$c = \lambda.f$$

$$\int h.df = \int \lambda^2.f^2.dm$$

$$\sin\alpha = \frac{v}{c} \Rightarrow v = c.\sin\alpha$$

$$\cos\alpha.d\alpha = \frac{dv}{c} \Rightarrow \frac{\sqrt{c^2 - v^2}}{c}.d\alpha = \frac{dv}{c}$$

$$d\alpha = \frac{dv}{\sqrt{c^2 - v^2}}$$

$$\cos\alpha = \frac{\sqrt{c^2 - v^2}}{c} \Rightarrow (c^2 - v^2) = c^2.\cos^2\alpha$$

$$dm = \frac{m_o.c.c.\sin\alpha.d\alpha}{c^2.\cos^2\alpha}$$ *dır. Düzenlersek*

$$dm = \frac{m_o.\sin\alpha.d\alpha}{\cos^2\alpha}$$ *yazılır.*

$$\int hdf = \int \lambda^2.f^2.\frac{m_o.\sin\alpha}{\cos^2\alpha}.d\alpha$$ ***olur.***

$$\int h.\frac{df}{f^2} = \int \lambda^2.\frac{m_o.\sin\alpha}{\cos^2\alpha}.d\alpha$$

$$\lambda = \frac{h}{m.v} dir. \lambda^2 = \frac{h^2}{m^2.v^2}$$

$$\lambda^2 = \frac{h^2}{\frac{m_o^2.c^2}{(c^2 - v^2)}.v^2} = \frac{h^2.(c^2 - v^2)}{m_o^2.c^2.v^2}$$

integralde yerine yazalım,

$$\int h.\frac{df}{f^2} = \int \frac{h^2(c^2 - v^2)}{m_o^2.c^2.v^2} \frac{m_o.\sin\alpha}{\cos^2\alpha}.d\alpha$$

$$\int \frac{df}{f^2} = \int \frac{h}{m_o.c^2.\sin\alpha}.d\alpha \text{ sonucu yazılır.}$$

$$I = \int \frac{d\alpha}{\sin\alpha} \text{ yı çözelim.}$$

$$I = \int \frac{\sin\alpha.d\alpha}{\sin^2\alpha} = \int \frac{\sin\alpha.d\alpha}{1 - \cos^2\alpha}$$

$u = \cos\alpha \Rightarrow du = -\sin\alpha . d\alpha$

$I = \int \frac{(-du)}{1-u^2} = \int \frac{du}{u^2-1}$ *çıkar.*

$\frac{1}{u^2-1} = \frac{A}{(u+1)} + \frac{B}{(u-1)}$ şeklinde yazılabilir.
$(u-1) \quad (u+1)$

1 = A.u – A+B.u + B → 1 = (A+B).u + B-A Buradan da,
A + B = 0
+ -A + B = 1 yazılır. Çözümünü yaparsak:
2B = 1 → B = 1 /2 ve A = -1 /2 elde edilir.

$I = \int \frac{du}{u^2-1} = \int \frac{(-1/2).du}{(u+1)} + \int \frac{(1/2).du}{(u-1)}$

$I = -\frac{1}{2} In|u+1| + \frac{1}{2} In|u-1|$

$I = \frac{1}{2} In \left| \frac{u-1}{u+1} \right|$ *yazılır.*

$I = \frac{1}{2} In \left| \frac{\cos\alpha - 1}{\cos\alpha + 1} \right|$ ***elde edilir.*** (XXVIII)

Eşitlikteki yerine yazarsak:

$\int \frac{df}{f^2} = \int \frac{h}{m_o.c^2} \frac{d\alpha}{\sin\alpha}$

$-\frac{1}{f} = \frac{h}{m_o.c^2} . \frac{1}{2} .In \left| \frac{\cos\alpha - 1}{\cos\alpha + 1} \right|$ *yazılır.* (XXIX)

$\frac{1}{f} = \frac{h}{m_o.c^2} . \frac{1}{2} .In \left| \frac{\cos\alpha + 1}{\cos\alpha - 1} \right|$ *yazılabilir.*

Düzenlenirse:

$\frac{2m_o.c^2}{h.f} = In\left|\frac{\cos\alpha + 1}{\cos\alpha - 1}\right|$ (XXX) yazılır.

$\cos\alpha = \frac{m_o}{m}$ *(Şekil II) ye göre;*

$$\frac{2m_o.c^2}{h.f} = In\left|\frac{\frac{m_o}{m} + 1}{\frac{m_o}{m} - 1}\right|$$

$h.f = E = m.c^2$ *dir.*

$$\frac{2m_o.c^2}{m.c^2} = In\left|\frac{m_o + m}{m_o - m}\right|$$

$In\left|\frac{m_o + m}{m_o - m}\right| = \frac{2m_o}{m}$ (XXXI)

Şeklinde bir denklem elde edilir veya daha geniş olarak,

$In\left|\frac{m_o+m}{m_o-m}\right| = \frac{2m_o}{m} = \frac{2E_o}{E}$ şeklinde de yazılabilir. (XXXII)

Ayrıca bir parçacığın kinetik enerjisi, $E_k = \frac{1}{2}mv^2$ 'dir.

Her iki tarafın t (zaman)'ye göre türevini alalım:

$$\frac{dE_k}{dt} = \frac{1}{2}\left[\frac{dm}{dt}.(v^2) + m.\frac{d}{dt}(v^2)\right]$$

$$\frac{dE_k}{dt} = \frac{1}{2}\left[\frac{dm}{dt}.v^2 + m.2v.\frac{dv}{dt}\right]$$

$$\frac{dE_k}{dt} = \frac{1}{2}\left[\frac{dm}{dv}\frac{dv}{dt}.v^2 + m.2v.\frac{dv}{dt}\right]$$ *yazılır.*

Burada, $\frac{dv}{dt} = a$ (ivme)'dir. Yerine yazalım:

$$\frac{dE_k}{dt} = \frac{1}{2}\left[\frac{dm}{dv}.a.v^2 + m.2v.a\right]$$ ***çıkar.***

$$m = \frac{m_o.c}{\sqrt{c^2 - v^2}}$$ ***idi.***

$$\frac{dm}{dv} = -\frac{m_o.c\,\frac{(-2v)}{2\sqrt{c^2 - v^2}}}{(c^2 - v^2)}$$

$$\frac{dm}{dv} = \frac{m_o.c.v}{(c^2 - v^2).\sqrt{c^2 - v^2}}$$ ***yazılabilir.***

$$\frac{dm}{dv} = \frac{m.v}{(c^2 - v^2)}$$ ***yazılabilir. Veya,***

$$\frac{dm}{dv} = \frac{m_o.c.\tan\alpha}{(c^2 - v^2)}, \tan\alpha = \frac{v}{\sqrt{c^2 - v^2}}$$ ***(Şekil I'e göre) dir.***

$$\cos\alpha = \frac{\sqrt{c^2 - v^2}}{c} \Rightarrow (c^2 - v^2) = c^2.\cos^2\alpha$$

$$\frac{dm}{dv} = \frac{m_o.c.\tan\alpha}{c^2.\cos^2\alpha} = \frac{m_o}{c.\cos^2\alpha}.\tan\alpha$$ *yazılır.*

$$\frac{dE_k}{dt} = \frac{1}{2}.\frac{m_o}{c.\cos^2\alpha}.\tan\alpha(a.v^2) + m.v.a$$

$$dE_K = \frac{1}{2}\frac{m_0}{c.\cos^2\alpha}.\tan\alpha(v^2).a.dt + m.v.adt$$ *yazılabilir.*

Buradan da

dv = a.dt dır,

$$\int dE_k = \int \frac{1}{2}\frac{m_o}{c.\cos^2\alpha}\tan\alpha.v^2.dv + \int m.v.dv$$ **elde edilir.**

$$E_K = \frac{1}{2}\int \frac{m_o}{c.\cos^2\alpha}\tan\alpha.v^2.dv + \int m.v.dv$$ ***yazılır. (Şekil I)'e göre;***

$$\sin\alpha = \frac{v}{c} \Rightarrow v = c.\sin\alpha$$

$$\cos\alpha.d\alpha = \frac{dv}{c} \Rightarrow dv = c.\cos\alpha.d\alpha$$ ***dır.***

$$E_k = \frac{1}{2}\int \frac{m_o}{c.\cos^2\alpha}\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}.c^2.\sin^2\alpha.c.\cos\alpha.d\alpha$$

$$+\int \frac{m_o.c}{\sqrt{c^2 - v^2}}.c.\sin\alpha dv$$ ***yazılır.***

$$d\alpha = \frac{dv}{\sqrt{c^2 - v^2}}$$ ***dır.***

$$E_k = \frac{1}{2}\int \frac{m_o.c^2.\sin^3\alpha}{\cos^2\alpha}.d\alpha$$

$+\int m_o.c^2.\sin\alpha.d\alpha$

$I=\int \frac{\sin^3\alpha}{\cos^2\alpha}.d\alpha$ integralini çözmeye çalışalım:

$I=\int \frac{\sin^2\alpha.\sin\alpha}{\cos^2\alpha}.d\alpha=\int \frac{(1-\cos^2\alpha).\sin\alpha.d\alpha}{\cos^2\alpha}$

$=\int \frac{\sin\alpha}{\cos^2\alpha}-\int \sin\alpha.d\alpha$ *olur.*

$u=\cos\alpha \Rightarrow du=-\sin\alpha.d\alpha$

$\Rightarrow I=\int \frac{(-du)}{u^2}+\cos\alpha$ *bulunur.*

$I=\frac{1}{u}+\cos\alpha=\frac{1}{\cos\alpha}+\cos\alpha$

Yerine yazarsak:

$$E_K = \frac{1.m_o c^2}{2}\left(\frac{1}{\cos\alpha} + \cos\alpha\right) - m_o.c^2.\cos\alpha$$

elde edilir. Düzenlersek:

$$E_K = \frac{m_o c^2}{2\cos\alpha} + \frac{m_o.c^2}{2}.\cos\alpha - m_o.c^2.\cos\alpha$$

$$E_K = \frac{m_o c^2}{2}\frac{1}{\cos\alpha} - \frac{m_o.c^2}{2}.\cos\alpha$$

$$E_K = \frac{m_o.c^2}{2}\left(\frac{1}{\cos\alpha} - \cos\alpha\right)$$ (XXXIII)

$$\cos\alpha = \frac{m_o}{m}$$ *(Şekil II'ye göre)*

$$E_K = \frac{m_o.c^2}{2}\left(\frac{m}{m_o} - \frac{m_o}{m}\right)$$

$$E_K = \frac{m_o.c^2}{2}.\left(\frac{m^2 - m_o^2}{m_o.m}\right)$$

$$E_K = \frac{(m^2 - m_o^2)}{2m}.c^2$$ *elde edilir.* (XXXIV)

$$E_K = \frac{(m^2.c^2 - m_o^2.c^2)(c^2)}{2m(c^2)}$$ *yazarsak,*

$$E_K = \frac{m^2c^4 - m_o^2c^4}{2mc^2} = \frac{E^2 - E_o^2}{2E}$$ (XXXV)

Burada, $E=m.c^2$ ve $E_o=m_o.c^2$ dir.

$$E_K = \frac{E^2 - E_o^2}{2E}$$

Bu parçacığın (ışık) hızını aşmayan enerjisi:

$$E = \int F.dr = \int m.\frac{dv}{dt}.dr$$

$$E = \int m.dv.\frac{dr}{dt} = \int m.dv.dv = \int dp.dv$$

$$p = m_o.c.\alpha idi \Rightarrow dp = m_o.c.d\alpha$$

$$\sin\alpha = \frac{v}{c} idi \Rightarrow \cos\alpha.c.d\alpha = dv$$

$$E = \int m_o.c.d\alpha.c.\cos\alpha.d\alpha = \int m_o.c^2.\cos\alpha.d\alpha.d\alpha$$

Her iki tarafın integralini alalım:

$$\int E = = \iint m_o.c^2(\cos\alpha.d\alpha)d\alpha \Rightarrow \int E = \int m_o.c^2\alpha.\cos\alpha.d\alpha$$

$u = \alpha \qquad du = d\alpha$

$$\int dk = \int \cos\alpha.d\alpha \Rightarrow k = \sin\alpha \text{ elde edilir.}$$

$$\int E = m_o.c^2\left[\alpha.\sin\alpha - \int \sin\alpha.d\alpha\right]$$

$$\int E = m_o c^2(\alpha.\sin\alpha + \cos\alpha)$$

çıkar. Şimdi de her tarafın türevini alalım:

$$d(\int E) = m_o.c^2(\sin\alpha + \alpha.\cos\alpha - \sin\alpha)$$

$E = m_o.c^2.\alpha.\cos\alpha$ (XXXVI) denklemi elde edilir. Buradaki α, radyan cinsindendir.

Düzgün dairesel hareket yapan bir parçacığın ivmesini bulmaya çalışalım:
F = m.a'dır. Türev alırsak:

$$\frac{dF}{dt} = \frac{d}{dt}(m.a) = \frac{dm}{dt}.(a) + m.\frac{da}{dt} \quad \textit{olur.}$$

$$F = \frac{mv^2}{R} \Rightarrow v = w.R \quad \textbf{dır}$$

Ve;

$F = \frac{m.w^2.R^2}{R} = m.w^2.R$ bulunur. Yerine yazarsak,

$$\frac{d}{dt}(m.w^2.R) = \frac{dm}{dt}.(a) + m.\frac{da}{dt}$$

$w^2.R = w.R.w = v.w$ ***dir.***

$\frac{d}{dt}(m.v.w) = \frac{dm}{dt}.(a) + m.\frac{da}{dt}$ yazılabilir. Buradan;

$$\frac{dm}{dt}(v.w) + m.\frac{d}{dt}(v.w) = \frac{dm}{dt}(a) + m.\frac{da}{dt}$$

$a = \frac{v^2}{R} = w^2.R = w.R.w = v.w$ ***dır.***

$$\frac{dm}{dt}(a) + m\left[\frac{dv}{dt}.(w) + v\frac{dw}{dt}\right]$$

$$= \frac{dm}{dt}(a) + m.\frac{da}{dt}, \qquad \frac{dv}{dt} = a$$ *dır.*

$$m.aw + m.v.\frac{dw}{dt} = m.\frac{da}{dt}$$

$$a.w + v.\frac{dw}{dt} = \frac{da}{dt} \Rightarrow a.w.dt + v.dw =$$ *da bulunur.*

$$w.dt + \frac{v.dw}{a} = \frac{da}{a}$$ *yazılabilir.*

$a = v.w$ *idi.*

$$w.dt + \frac{v.dw}{v.w} = \frac{da}{a}$$

$$w.dt + \frac{dw}{w} = \frac{da}{a}$$ bulunur. Her iki tarafın integralini alırsak:

$\int w.dt + \int \frac{dw}{w} = \int \frac{da}{a}$ yazılır ve w.t+Inw=Ina yazılır. (XXXVII) Düzenlersek,

In $e^{(wt)}$ + Inw = Ina yazılabilir.

In (e^{wt}.w)=Ina ve a=w.e^{wt}=w.e^{α} (XXXVIII) elde edilir.

Veya

$w.dt + \frac{dw}{w} = \frac{da}{a}$ ***idi.***

$w.t = \alpha dırvew = \frac{\alpha}{t}$ ***yazılabilir.***

$\frac{\alpha}{t}.dt + \frac{dw}{w} = \frac{da}{a}$ **elde edilir.**

İntegral alırsak;

$$\int \alpha \frac{dt}{t} + \int \frac{dw}{w} = \int \frac{da}{a}$$ ve α.Int + Inw = Ina bulunur.

Buradan da;

Int (α) + Inw = Ina ve In (t^{α}.w) = Ina

a = w. t^{α} = w.$t^{(wt)}$ bulunur. (XXXIX)

Her iki ivme (a) eşitliğindeki α, radyan cinsinden alınmalıdır.

İlgileriniz için çok teşekkür ederim…

Necati DEMİROĞLU
(GSM: 0 533 620 05 23)